

## **МОДЕЛІ ПЛАНОВИХ БЕЗЗБИТКОВИХ ОБСЯГІВ ВИРОБНИЦТВА**

*Пропонується метод побудови моделі точок беззбитковості*

**Постановка проблеми.** В залежності від планових завдань, які можуть стояти перед виробниками продукції, виникає проблема у самій постановці визначення беззбиткових обсягів виробництва (точок беззбитковості) як для однопродуктового так і багатопродуктового виробництва. Ще одна проблема виникає у визначенні точок беззбитковості в моделях виробництва з постійними витратами що змінюються в часі.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Для об'єктивного висвітлення будь-якої проблеми необхідною умовою є вивчення напрацювань попередніх дослідників. Питання моделювання беззбитковості фігурує в досить чисельній кількості літературних джерел. На жаль, деяким проблемам цієї тематики, приведеним автором, не приділялась увага і тому публікації, стосовно поставлених проблем, відсутні.

**Мета дослідження.** На основі аналізу результатів отриманих в роботах [1-3] розвинути розробку методики побудови планової (статичної) моделі критичних обсягів виробництва в тісному поєднанні математичних і інформаційних підходів виходячи із наступних вимог:

1. Підприємство виробляє і реалізує декілька видів продукції (багатопродуктова модель).
2. Вважається, що ринок вивчений, стабільний, є статистика про питому вагу реалізації продукції в плановому періоді.
3. Кожен вид продукції в плановому періоді реалізується за однією ціною.
4. Собівартість реалізованої продукції з урахуванням всіх загальновиробничих витрат в плановому періоді вважається незмінною.
5. На підприємстві відсутні запаси готової продукції минулих періодів.

**Завдання дослідження.** На основі результатів, отриманих в роботах [1-3], розглянемо постановку задачі визначення точок беззбитковості стосовно характерних ситуацій, що можуть виникнути в процесі планової діяльності. Спочатку розглянемо постановку задач і їх вирішення для планових точок беззбитковості стосовно однопродуктового виробництва а потім і багатопродуктового.

Традиційно, пошук точок беззбитковості стосовно однопродуктового виробництва впливає із наступного завдання.

**Завдання 1.** За заданими (плановими) змінними одиничними витратами ( $U$ ), постійними витратами ( $Z$ ), ціною реалізації ( $C$ ) планового періоду ( $T$ ) визначити в плановому періоді беззбитковий обсяг (точку беззбитковості) виробництва ( $X_b$ ). Інакше, за заданими параметрами  $U$ ,  $Z$  і  $C$  потрібно визначити, який обсяг продукції  $X_b$  потрібно випустити протягом планового періоду, щоб він був беззбитковим.

Як відомо, за умови, що  $(1-\alpha)(1-\beta)aC > U$ , потрібний беззбитковий обсяг продукції визначається за формулою:

$$X_b = \frac{Z}{(1-\alpha)(1-\beta)aC - U}, \quad (1)$$

де  $\alpha$ - ставка ПДВ,  $\beta$ - ставка акцизного збору,  $a$  – питома вага реалізації продукції. Без врахування податкових навантажень і врахуванням попиту на всю продукцію, формула (1) матиме наступний вигляд:

$$X_b = \frac{Z}{C - U} \quad (C > U). \quad (2)$$

Як відомо, формула (2) одержується із рівняння:

$$CX = UX + Z \quad (3)$$

розв'язок якого виражає мінімальний обсяг виробництва протягом планового періоду, виручка від якого покриває всі сукупні витрати планового періоду.

Як правило, підприємство з певних міркувань планує на деякий період  $T$  випуск  $X_p$  од. продукції. Продуктивність виробництва, як відомо, знаходить своє відображення у швидкості ( $V$ ) виробництва, тобто обсягу виробництва в одиницю часу. Якщо скажімо, в плановому періоді  $T$  передбачається випустити  $X_p$  од. продукції, то  $V = X_p / T$ , а поточний обсяг виробництва є лінійною функцією часу:

$$X(t) = Vt = \frac{X_p}{T} t \quad (4)$$

Виникає наступне завдання.

**Завдання 2.** За плановими змінними одиничними витратами ( $U$ ), ціною реалізації ( $C$ ) планового періоду ( $T$ ), продуктивністю виробництва ( $X_p / T$ ) визначити в плановому періоді такий мінімальний обсяг виробництва ( $X_b$ ) і термін настання його випуску в плановому періоді, виручка, від реалізації якого, покрила б всі сукупні витрати планового періоду.

Відповідь на поставлене завдання дає точка беззбитковості, яка може бути виражена формулою:

$$X'_b = \frac{UX_p + Z}{C} \quad (5)$$

А термін настання беззбитковості знаходиться за формулою:

$$\frac{UX_p + Z}{C} = \frac{X_p}{T} t' \Rightarrow t' = \frac{T(UX_p + Z)}{CX_p} \quad (6)$$

У всякому випадку, із формули (6), при  $X_p \rightarrow +\infty$ , слідує, що беззбитковість наступить не раніше  $TU/C$  од. часу ( $U < C$ ).

Беззбитковість виробництва наступить в плановому періоді за умови, що  $t' \leq T$ , яка, враховуючи співвідношення (6), дає можливість здійснити порівняльний аналіз запланованого випуску продукції  $X_p$  з точками беззбитковості  $X_b$  і  $X'_b$ :

$$X'_b = \frac{UX_p + Z}{C} = \frac{X_p}{T} t' \leq X_p \Rightarrow X_p \geq \frac{Z}{C-U} = X_b \quad (7)$$

В свою чергу, порівняльний аналіз точок беззбитковості, використовуючи нерівності (7), впливає із наступного ланцюга рівносильних нерівностей:

$$X_p \geq \frac{Z}{C-U} \Leftrightarrow CX_p - (UX_p + Z) \geq 0 \Leftrightarrow CUX_p + ZC - U(UX_p + Z) \geq ZC \Leftrightarrow (UX_p + Z)(C-U) \geq ZC \Leftrightarrow \frac{UX_p + Z}{C} \geq \frac{Z}{C-U} \Leftrightarrow X'_b \geq X_b \quad (8)$$

Таким чином, зростання планових обсягів випуску продукції зумовлює зростання точки беззбитковості і скорочення строків настання беззбитковості.

Постійні витрати  $Z$  за своїм походженням не залежать від обсягу випуску продукції, а від часу залежать. Якщо їх розглядати як функцію часу  $Z = Z(t)$  ( $t \in [0; T]$ ), то рівність:

$$CX(t) = UX(t) + Z(t) \quad (9)$$

характеризуватиме той факт, що обсяг випуску продукції  $X(t)$ , який задовольняє рівняння (9), визначатиме мінімальний беззбитковий обсяг, виручка від реалізації якого покриє всі сукупні витрати за  $t$  – період. Така модель беззбитковості виникає при плануванні поточних змінних і постійних витрат в плановому періоді. Розв'язок рівняння (9) відносно параметру часу дасть можливість, за заданими функціями  $X(t)$  і  $Z(t)$ , знаходити так звані поточні точки беззбитковості планового періоду.

Таким чином переходимо до наступного завдання.

**Завдання 3.** За плановими змінними одиничними витратами ( $U$ ), ціною реалізації ( $C$ ) планового періоду ( $T$ ), продуктивністю виробництва ( $X_p/T$ ) визначити в плановому періоді беззбитковий мінімальний обсяг виробництва ( $X_b$ ) і термін його настання ( $t_{opt}$ ) в плановому періоді, виручка, від реалізації якого, покрила б всі сукупні витрати цього терміну.

Нехай на кінець планового періоду постійні витрати складатимуть  $Z(T)$  у.о., а на початок,  $Z(0)$  у.о. Припустимо, що зміна постійних витрат протягом планового періоду відбуватиметься в лінійній залежності від часу  $t$  (що відповідає багатьом ситуаціям), тобто,  $Z(t) = Z(0) + dt$ , де  $d$  – швидкість зміни постійних витрат (кількість постійних витрат в одиницю часу). Пояснимо правомірність вибору лінійної залежності постійних витрат від часу. Постійні витрати не пов'язані з об'ємами випуску продукції. Разом з тим, постійні

витрати є функцією обсягу випуску продукції. Це не важко зрозуміти з наступних міркувань. Функція випуску продукції  $X = X(t)$  монотонно зростаюча, тому має обернену,  $t = X^{-1}(x) = X / V = XT / X_p$ . Підставляючи отриману змінну  $t$  в параметричне рівняння постійних витрат  $Z = Z(t)$ , отримаємо функціональну залежність постійних витрат від обсягу випуску продукції  $Z = Z(XT / X_p)$ . Так як постійні витрати не пов'язані з об'ємами випуску продукції, то залежність можна вибрати будь яку, найпростіша – лінійна залежність.

Параметричні рівняння випуску продукції і постійних витрат підставимо в балансову тотожність (9), отримаємо,  $CVt = UVt + Z(0) + dt$ . Звідки знаходимо значення параметра часу  $t$ , за який підприємство досягне стану беззбитковості:

$$t = \frac{Z(0)}{(C-U)V-d} = \frac{Z(0)T}{(C-U)X_p - (Z(T) - Z(0))} \quad (10)$$

Якщо знайдене значення параметра  $t$  підставити в параметричне рівняння  $X = Vt$ , одержимо мінімальний беззбитковий обсяг виробництва:

$$X_b^{\bullet} = \frac{Z(0)V}{(C-U)V-d} \quad (11)$$

Так як, очевидно,  $V = X_p / T$ ,  $d = (Z(T) - Z(0)) / T$ , то формула (11) буде мати наступний вигляд:

$$X_b^{\bullet} = \frac{Z(0)X_p}{(C-U)X_p - (Z(T) - Z(0))} = \frac{Z(0)}{C-U - \frac{Z(T) - Z(0)}{X_p}} \quad (12)$$

за умови, що:

$$C-U - \frac{Z(T) - Z(0)}{X_p} > 0 \quad (13)$$

тобто, коли маржинальний прибуток від одиниці продукції буде більшим від поточних постійних витрат на одиницю продукції планового періоду.

Метод аналізу планової беззбитковості виробництва особливо ефективний в інвестиційних процесах, коли вибір виробничого процесу пов'язано із початковими капітальними вкладаннями. Якщо  $Z(0)$  – запланований обсяг капіталу в постійні витрати на початок планового періоду, а  $Z(T) - Z(0)$  – запланований розмір коштів (наприклад, зароблених підприємством в плановому періоді) для покриття постійних витрат, що виникатимуть в плановому періоді, то формула (12) говорить, що для знаходження точки беззбитковості потрібно вже вкладений капітал поділити на маржинальний прибуток одиниці виробленої продукції за вирахуванням майбутніх постійних витрат на одиницю запланованого випуску продукції.

Відмітимо деякі особливості формули (12). Перша особливість полягає в тому, що при  $Z(T) = Z(0) \neq 0$  отримаємо формулу (стосовно завдання 1) для визначення точки беззбитковості планового періоду:

$$X_b^{\bullet} = \frac{Z(T)}{C - U} \quad (14)$$

Точка беззбитковості може бути знайдена за формулою (14), коли планується інвестувати кошти на покриття всіх запланованих постійних витрат. Дійсно, коли  $Z(T) = Z(0)$ , то це означає, що  $Z(T) = Z(0) + dT = Z(0)$ , звідки  $d = 0$ , тобто ніяких змін постійних витрат протягом планового періоду здійснено не буде.

З геометричної точки зору, точку беззбитковості можна трактувати як абсциса точки перетину прямої постійних витрат і прямої маржинального прибутку (рис. 1).

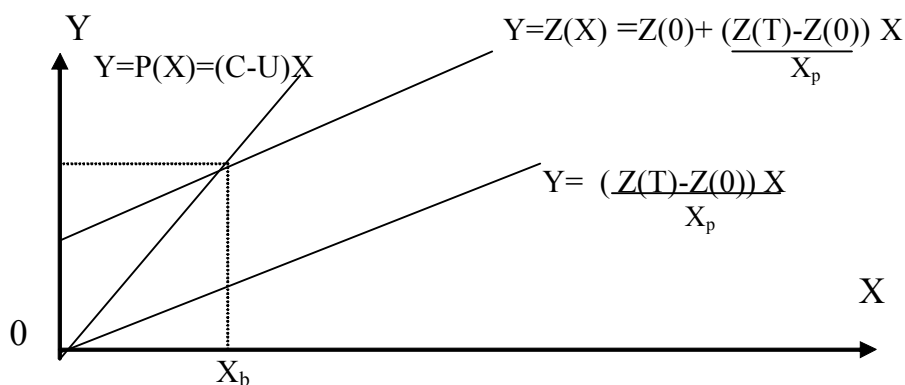


Рис. 1.

Друга особливість формули (12) полягає в тому, що при  $Z(0) = 0$ , точка беззбитковості буде нульовою. Це означає, що (рис. 1) графік маржинального прибутку лежить вище графіка постійних витрат. При підстановці у рівняння (9) виразів,  $Z(T) = Z(0) + dt = dt$  і  $X(t) = X_p t / T$ , отримаємо рівність,  $d = (C - U) X_p / T$ , що характеризує співпадання швидкості постійних витрат зі швидкістю отримання маржинального прибутку.

Третя особливість формули (12) полягає в тому, що для  $Z(0) \neq 0$ , в теоретичному плані, при необмеженому зростанні планових обсягів виробництва (при  $X_p \rightarrow +\infty$ ) точка беззбитковості прямує до свого граничного значення  $Z(0) / (C - U)$ , тобто до беззбиткового обсягу виробництва, який в основному стає залежним від початкових постійних витрат.

Що стосується порівняння точок беззбитковості, знайдених окремо за формулами (12) і (14), то виявляється, що планова точка беззбитковості, знайдена за формулою (14) взагалі є більшою від точки беззбитковості, знайденої за формулою (12). Математична перевірка приведеного факту зводиться до перевірки наступної

нерівності шляхом приведення неї до очевидної нерівності, що виражає собою прибутковість підприємства на кінець планового періоду, за допомогою наступного ланцюга рівносильних нерівностей:

$$\frac{Z(0)}{C-U-\frac{Z(T)-Z(0)}{X_p}} < \frac{Z(T)}{C-U} \Leftrightarrow Z(0)(C-U)X_p < Z(T)(C-U)X_p - (Z(T)-Z(0))Z(T) \Leftrightarrow$$

$$Z(T)(Z(T)-Z(0)) < (C-U)X_p(Z(T)-Z(0)) \Leftrightarrow (C-U)X_p - Z(T) > 0$$

Розглянемо приклад на застосування формули (12).

Приклад 1. Компанія планує купити станок вартістю 50000 грн. для виробництва 25000 од. нового виробу протягом 12 місяців року. Планова структура ціни виробу має наступний вигляд:

- продажна ціна – 42 грн.
- вартість сировини і матеріалів – 24 грн.
- зарплата виробничого персоналу – 6 грн.

Амортизація планового періоду – 40000 грн. Загальні витрати – 10000 грн.. Вважаючи, що амортизація протягом планового періоду буде нараховуватись рівномірно, а також рівномірно будуть змінюватись загальні витрати, потрібно знайти беззбитковий обсяг виробництва планового періоду, час настання беззбитковості і відповідні змінні витрати на момент стану беззбитковості.

В нашому прикладі,  $Z(0)=50000$  грн.,  $Z(T) = 40000+10000 + 50000 = 100000$  грн.,  $C = 42$  грн.,  $U = 24+6 = 30$  грн.,  $X_p = 25000$  од. За формулою (24) знаходимо точку беззбитковості:

$$\frac{50000}{42-30-\frac{100000-50000}{25000}} = 5000 \text{ од.},$$

а за формулою (22) термін настання стану беззбитковості:

$$\frac{50000 \times 12}{(42-30) \times 25000 - 50000} = 2,4 \text{ місяців.}$$

Постійні витрати складатимуть, (за формулою  $Z(t) = Z(0) + dt$ )  $Z(2,4) = 50000 + (50000/12) \times 2,4 = 60000$  грн. Якщо тепер обчислити точку беззбитковості за формулою (2):

$$\frac{Z(T)}{C-U} = \frac{100000}{42-30} = 8333 \text{ од.},$$

а потім точку беззбитковості за формулою (5):

$$\frac{UX_p + Z}{C} = \frac{30 \times 25000 + 100000}{42} = 20238 \text{ од.}$$

і її термін настання:

$$\frac{T(UX_p + Z)}{CX_p} = \frac{12(30 \times 25000 + 100000)}{42 \times 25000} = 9,7 \text{ міс.},$$

то, у відповідності поставлених завдань 1–3, різниця між трьома знайденими точками безбитковості полягатиме в їх наступній інтерпретації. Стосовно формули (12): якщо підприємство протягом планового періоду випустить і реалізує 25000 од. продукції, то термін безбитковості настане через 2,4 міс. і за цей період безбитковий обсяг випуску продукції становитиме 5000 од. Стосовно формули (2): якщо протягом планового періоду підприємство випустить і реалізує 8333 од. продукції, то такий обсяг буде безбитковим. Стосовно формули (5): якщо підприємство планує за 12 міс. року випустити 25000 од. продукції, то обсяг випуску продукції в 17881 од. покриє всі сукупні витрати планового періоду.

Як показують приведені міркування в однопродуктовій моделі виробництва є три види визначення планової безбитковості:

- 1) визначення планових безбиткових обсягів виробництва в даному періоді;
- 2) визначення безбиткових обсягів виробництва за плановими об'ємами випуску продукції даного періоду;
- 3) визначення поточних безбиткових обсягів виробництва за плановими об'ємами випуску продукції даного періоду.

Приведені вище три види визначення планової моделі безбитковості для однопродуктового виробництва можуть бути розповсюджені і на багатопродуктове виробництво.

Звернемося до першого завдання. Обсяги реалізації продукції в плановому періоді по  $n$ -видах позначимо через  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ; ціни реалізації –  $C_1, C_2, \dots, C_n$ ;  $U_1, U_2, \dots, U_n$  – змінні одиничні витрати відповідно.

**Завдання 4.** За заданими (плановими) змінними одиничними витратами ( $U_1, U_2, \dots, U_n$ ), постійними витратами ( $Z$ ) планового періоду ( $T$ ), цінами реалізації ( $C_1, C_2, \dots, C_n$ ) планового періоду, визначити в плановому періоді безбиткові обсяги (точку безбитковості) ( $X_{1b}, X_{2b}, \dots, X_{nb}$ ) виробництва по кожному виду продукції. Інакше, за заданими параметрами ( $U_1, U_2, \dots, U_n$ ),  $Z$  і ( $C_1, C_2, \dots, C_n$ ) потрібно визначити, які обсяги продукції ( $X_{1b}, X_{2b}, \dots, X_{nb}$ ) потрібно випустити протягом планового періоду, щоб вони були безбитковими.

Аналогом рівняння (3), з якого знаходяться точки безбитковості, в багатопродуктовій моделі виробництва є наступне рівняння:

$$\sum_{j=1}^n C_j X_j = \sum_{j=1}^n U_j X_j + Z \quad (15)$$

де  $X_k \geq 0$  ( $k = 1, \dots, n$ ), або рівняння:

$$\sum_{j=1}^n (C_j - U_j) X_j = Z \quad (16)$$

Виходячи із геометричних міркувань, потрібно знайти розв'язки рівняння (16) в першому октанті. Всі ці розв'язки – це множина точок перетину

гіперплощини (16) з першим октантом. Множина точок перетину являє собою  $n$ -вимірний многогранник, кожна точка якого є опуклою лінійною комбінацією його вершин  $(0; \dots, Z / (C_k - U_k), \dots, 0)$ , тобто це точки виду:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{Z}{C_k - U_k}$$

де  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ ,  $0 \leq \lambda_k \leq 1$ . Точки, координати яких визначаються за формулами:

$$X_k = \frac{\lambda_k Z}{\sum_{j=1}^n (C_j - U_j) \lambda_j} \quad k = 1, \dots, n \quad (17)$$

як не важко перевірити, задовольняють рівняння (16) і вичерпують всі його розв'язки.

Величину  $\lambda_k$ , у формулі (17) можна трактувати наприклад, як частку випуску  $k$ -того виду продукції в загальній структурі випуску, як частку ціни реалізації в сумарній ціні реалізації, вартості  $k$ -того виду продукції в загальній структурі вартості випуску всіх видів продукції.

Із формул (17) слідує, що для кожної послідовності невід'ємних чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  таких, що  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$  формули (17) визначають точку беззбитковості. Таких точок беззбитковості, як свідчить даний метод їх знаходження, може бути безліч.

Для постановки наступного завдання домовимось, що  $X_{pk}$  – плановий випуск продукції  $k$ -того виду протягом планового періоду  $T$ . Тоді  $V_k = X_{pk} / T$  – швидкість випуску,  $X_k = V_k t$  – параметричні рівняння випуску продукції.

**Завдання 5.** За плановими змінними одиничними витратами ( $U_1, U_2, \dots, U_n$ ), цінами реалізації ( $C_1, C_2, \dots, C_n$ ) планового періоду ( $T$ ), продуктивністю виробництва ( $X_{pk} / T$ ) визначити в плановому періоді такі беззбиткові обсяги виробництва  $X_{kb}$  і термін настання їх випусків в плановому періоді, виручка, від реалізації яких, покрила б всі сукупні витрати планового періоду.

Виходячи із умов завдання 5, потрібно при  $X_k = (X_{pk} / T)t$  розв'язати рівняння:

$$\sum_{j=1}^n C_j X_j = \sum_{j=1}^n U_j X_{pj} + Z(T) \quad (18)$$

відносно  $t$ , тобто рівняння:

$$\sum_{j=1}^n C_j \frac{X_{pj}}{T} t = \sum_{j=1}^n U_j X_{pj} + Z(T) \quad (19)$$

Із (19) знаходимо термін ( $t$ ), за який можна покрити заплановані сукупні витрати і координати  $X_{pj}$  точки беззбитковості:



$$t' = \frac{T \left( \sum_{j=1}^n U_j X_{pj} + Z(T) \right)}{\sum_{j=1}^n C_j X_{pj}}, \quad X_{jb} = \frac{X_{pj} \left( \sum_{j=1}^n U_j X_{pj} + Z(T) \right)}{\sum_{j=1}^n C_j X_{pj}} \quad (20)$$

Беззбитковий обсяг випуску продукції протягом планового періоду буде досягнуто, коли  $t' \leq T$ , що рівносильно, як слідує із (20), нерівності  $X_{jb}' \leq X_{pj}$ .

Як і в однопродуктовій моделі, в багатопродуктовій моделі можна здійснити порівняльний аналіз точок беззбитковості в завданнях 4 і 5, виходячи із наступного ланцюга рівносильних нерівностей (21):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (C_k - U_k) X_{pk} \geq Z(T) &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n C_k X_{pk} - \sum_{k=1}^n U_k X_{pk} \geq Z(T) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n U_k X_{pk} \leq \sum_{k=1}^n C_k X_{pk} \\ &- \left( \sum_{k=1}^n U_k X_{pk} \right)^2 + Z(T) \sum_{k=1}^n C_k X_{pk} - Z(T) \sum_{k=1}^n U_k X_{pk} \geq Z(T) \sum_{k=1}^n C_k X_{pk} \Leftrightarrow X_{bj}' = \\ &\frac{X_{pj} \left( \sum_{k=1}^n U_k X_{pk} + Z(T) \right)}{\sum_{k=1}^n C_k X_{pk}} \geq \frac{X_{pj} Z(T)}{\sum_{k=1}^n (C_k - U_k) X_{pk}} = X_{bj} \end{aligned} \quad (21)$$

Наступне завдання стосується визначення поточних точок беззбитковості, тобто точок беззбитковості з урахуванням зміни постійних витрат у часі.

**Завдання 6.** За плановими змінними одиничними витратами ( $U_1, U_2, \dots, U_n$ ), цінами реалізації ( $C_1, C_2, \dots, C_n$ ) планового періоду ( $T$ ), продуктивностями виробництва ( $X_{pk} / T$ ) визначити в плановому періоді беззбитковий мінімальний обсяг виробництва ( $X_b$ ) і термін його настання ( $t_{opt}$ ) в плановому періоді, виручка, від реалізації якого, покрила б всі сукупні витрати цього терміну.

Будемо вважати, що підприємство в плановому періоді працюватиме ритмічно, тобто випуск продукції по всіх видах відбуватиметься прямо пропорційно часу,  $X_k = V_k t$ , де  $V_k$  – обсяг випуску продукції  $k$ -того виду за одиницю часу (швидкість випуску). Якщо  $X_{pk}$  – плановий випуск продукції  $k$ -того виду протягом планового періоду  $T$ , то  $V_k = X_{pk} / T$ .

Вважатимемо, що зміна постійних витрат протягом планового періоду відбуватиметься пропорційно часу  $t$ , тобто  $Z(t) = Z(0) + dt$ , де  $d$  – швидкість зміни постійних витрат, очевидно,  $d = (Z(t) - Z(0)) / T$ . Параметричні рівняння випуску продукції і постійних витрат підставимо в балансову тотожність (15):

$$\begin{aligned} t \sum_{j=1}^n (C_j - U_j) V_j = Z(0) + dt &\Rightarrow t = \frac{Z(0)}{\sum_{j=1}^n (C_j - U_j) V_j - d} = \\ &\frac{Z(0)T}{\sum_{j=1}^n (C_j - U_j) X_{pj} - (Z(T) - Z(0))} \end{aligned} \quad (22)$$

Знайдене значення параметра часу  $t$  можна трактувати як період, за який підприємство досягне стану беззбитковості. Підставляючи його у параметричні рівняння  $X_k = V_k t$ , отримаємо координати точки беззбитковості за формулами:

$$X_b^{\bullet} = \frac{Z(0)X_{pk}}{\sum_{j=1}^n (C_j - U_j)X_{pj} - (Z(T) - Z(0))} \quad (23)$$

$k = 1, \dots, n$

Якщо планується виділення коштів повністю на покриття постійних планових витрат, тобто  $Z(T) = Z(0)$ , то поділивши формулу (23) на загальний обсяг випуску продукції, одержимо формули (17) визначення точки беззбитковості.

Стосовно завдань 4-6 розглянемо приклад.

Приклад 2. Компанія планує купити станок вартістю 50000 грн. для виробництва 25000 од. нових виробів протягом року, в тому числі, 12000 од. одного виду і 13000 од. другого виду. Планова структура ціни виробів має наступний вигляд:

для першого виробу

- продажна ціна – 42 грн.
- вартість сировини і матеріалів – 24 грн.
- зарплата виробничого персоналу – 6 грн.;

для другого виробу

- продажна ціна – 50 грн.
- вартість сировини і матеріалів – 25 грн.
- зарплата виробничого персоналу – 7 грн.

Амортизація планового періоду, що складає 12 місяців, – 40000 грн. Загальні витрати – 10000 грн.. Вважаючи, що амортизація протягом планового періоду буде нараховуватись рівномірно, а також рівномірно будуть змінюватись загальні витрати, потрібно знайти беззбиткові обсяги виробництва по кожному виду продукції планового періоду, термін настання беззбитковості і розмір постійних витрат, що відповідатимуть цьому терміну.

В нашому прикладі:  $T = 12$ ,  $Z(0) = 50000$  грн.,

$Z(T) = 40000 + 10000 + 50000 = 100000$  грн.,

$C_1 = 42$  грн.,  $U_1 = 24 + 6 = 30$  грн.,  $X_{p1} = 12000$  од.,

$C_2 = 50$  грн.,

$U_2 = 25 + 7 = 32$  грн.,

$X_{p2} = 13000$ .

За формулою (21) знаходимо період настання беззбитковості:

$$t = \frac{50 \times 12}{(42 - 30)12 + (50 - 32)13 - (100 - 50)} = \frac{600}{328} = 1,8 \text{ місяців.}$$

За формулою (23) знаходимо беззбиткові обсяги виробництва:

$$X_1^{\bullet} = \frac{50 \times 12000}{328} = 1819 \text{ од.}, X_2^{\bullet} = \frac{50 \times 13000}{328} = 1978 \text{ од.}$$

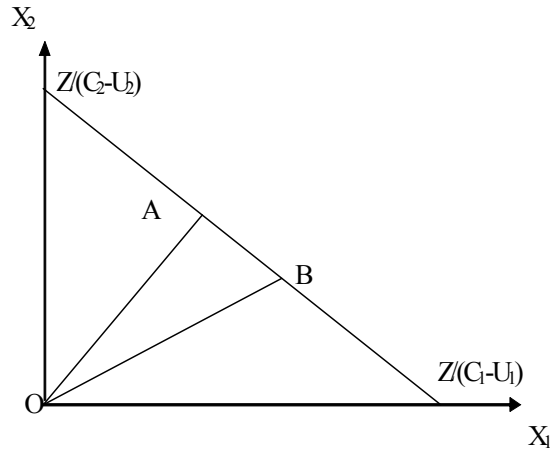
Постійні витрати, що відповідатимуть терміну беззбитковості становитимуть:  $Z(1,8) = 50000 + 50000(1,8/12) = 57500$  грн.

Якщо беззбиткові обсяги виробництва знаходити безпосередньо за формулою (17), то  $X_1^* = 1587$  од.  $X_2^* = 1719$  од. Коментар до застосування формули (17): якщо протягом 12 місяців підприємство випустить 1587 од. продукції першого виду і 1719 од. продукції другого виду, то воно буде беззбитковим. Коментар до застосування формули (23): якщо протягом 12 місяців підприємство випустить 12000 од. продукції першого виду і 13000 од. продукції другого виду, то стан беззбитковості для підприємства наступить через 1,8 міс., при цьому беззбитковими будуть 1819 од. першого виду і 1978 од. другого виду, а змінні витрати становитимуть 57500 грн.

Стосовно завдання 4 зробимо зауваження. Завдання 4 передбачає визначення точки беззбитковості, за заданими параметрами  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ ,  $(C_1, C_2, \dots, C_n)$  і  $T$ , не враховуючи тієї обставини, як повинно працювати підприємство протягом планового періоду. Тому з практичної сторони більш доцільним є наступне завдання.

**Завдання 7.** За заданими змінними одиничними витратами  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , постійними витратами  $Z$ , цінами реалізації  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , продуктивностями  $V_1, V_2, \dots, V_n$  виробництва (швидкостями випуску) по кожному виду продукції визначити найкоротший плановий період беззбитковості підприємства і відповідні беззбиткові обсяги. продукції

В завданні 7 вимагається за даним рівномірним випуском продукції (що є природнім в плановій діяльності підприємства), визначити найкоротший плановий термін беззбитковості і його обсяги. Рівномірний випуск продукції знаходить своє відображення як прямолінійна траєкторія у фазовому просторі багатьох змінних, а точка беззбитковості, як точка перетину прямої, заданої параметрично, з гіперплощиною (16). Досягнути точок беззбитковості в часі можна по різному – за різними прямолінійними траєкторіями. На рис. 2, у випадку двохпродуктового виробництва, схематично показані приклади таких прямолінійних траєкторій ОА (найкоротша) і ОВ досягнення точок беззбитковості.



**Рис. 2.**

Найкоротша із них, у загальному випадку  $R^n$ , це перпендикуляр (ОА на рис. 2) опущений із початку координат на гіперплощину (16). Ця довжина, враховуючи координати нормального вектора  $N = (C_1 - U_1, \dots, C_n - U_n)$  гіперплощини (2), може бути знайдена за відомою формулою визначення віддалі від точки до гіперплощини:

$$d = \frac{Z}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (C_k - U_k)^2}} \quad (24)$$

Так як випуск по кожному виду продукції в плановому періоді передбачається рівномірним тобто,  $X_k = V_k t$ ,  $k = 1, \dots, n$ , ( $V_k$  – швидкість випуску продукції,  $t$  – час випуску), то  $V = \sqrt{\sum_{k=1}^n V_k^2}$  – абсолютна швидкість випуску всієї продукції. Якщо довжину шляху  $d$  поділити на величину швидкості  $V$ , то отримаємо період настання планової беззбитковості, який визначається за формулою:

$$t = \frac{Z}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (C_j - U_j)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n V_k^2}} \quad (25)$$

Для знаходження точки беззбитковості, тобто координат основи перпендикуляра (координат точки А рис. 2) потрібно записати його параметричні рівняння, враховуючи той факт, що його направляючий вектор є нормальним вектором ( $N$ ) гіперплощини (16),  $N = (C_1 - U_1, C_2 - U_2, \dots, C_n - U_n)$ ,  $X_k = (C_k - U_k)t$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Після підстановки параметричних рівнянь в рівняння (16) знайдемо значення параметра  $t$  за формулою:

$$t = \frac{Z}{\sum_{j=1}^n (C_j - U_j)^2} \quad (26)$$

Значення параметра  $t$  підставимо в рівняння  $X_k = (C_k - U_k)t$ ,  $k = 1, \dots, n$ , знайдемо координати точки беззбитковості за формулою:

$$X_k^{**} = \frac{Z(C_k - U_k)}{\sum_{j=1}^n (C_j - U_j)^2} \quad k = 1, \dots, n \quad (27)$$

Наступний приклад відноситься до завдання 7.

Приклад 3. Компанія купила станок вартістю 50000 грн. потужністю 1000 од. виробів в місяць одного виду, і 1083 од. другого виду. Планова структура ціни виробів має наступний вигляд:

для першого виробу

- продажна ціна – 42 грн.
- вартість сировини і матеріалів – 24 грн.
- зарплата виробничого персоналу – 6 грн.;

для другого виробу

- продажна ціна – 50 грн.
- вартість сировини і матеріалів – 25 грн.
- зарплата виробничого персоналу – 7 грн.

Постійні витрати плануються в розмірі 100000 гр., Потрібно знайти найкоротший термін настання беззбитковості і беззбиткові обсяги виробництва по кожному виду продукції планового період.

В нашому прикладі,  $Z = 100000$  грн.,  $C_1 = 42$  грн.,  $U_1 = 30$  грн.,  $V_1 = 1000$  од/міс.,  $C_2 = 50$  грн.,  $U_2 = 32$  грн.,  $V_2 = 1083$  од/міс. Знаходимо найкоротший термін настання беззбитковості:

$$t = \frac{100000}{\sqrt{144 + 289} \sqrt{1000^2 + 1083^2}} = 3,26 \text{ міс.},$$

а також точку беззбитковості за формулою (27):

$$X_{b1}^{**} = 100000 \times 12 / 433 = 2771 \text{ од.}, X_{b2}^{**} = 100000 \times 18 / 433 = 4157 \text{ од.}$$

**Висновки.** Приведені дослідження показують, що в багатопродуктовій моделі виробництва з рівномірним випуском продукції є чотири види визначення планової беззбитковості. Потрібно:

1) за фіксованим плановим періодом і фіксованими параметрами,  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – цінами реалізації,  $U_1, U_2, \dots, U_n$  – одиничними змінними витратами,  $Z$  – постійними витратами, знайти точки беззбитковості.

Точка беззбитковості в цьому випадку знаходиться однозначно, коли запланована структура випуску всієї продукції;

2) за плановими швидкостями випуску продукції (тоді відома структура випуску всієї продукції) і параметрами  $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ ,  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ ,  $Z$  знайти період беззбитковості і точку беззбитковості.

3) за заданими обсягами випуску продукції у плановому періоді (або за заданими швидкостями) і параметрами  $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ ,  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ ,  $Z$  знайти період беззбитковості і точку беззбитковості.

4) за заданими обсягами випуску продукції у плановому періоді (або за заданими швидкостями) і постійними швидкостями зміні постійних витрат, параметрами  $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ ,  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ , знайти період беззбитковості і точку беззбитковості.

### **ЛІТЕРАТУРА:**

1. *Щехорський А.Й.* До питання моделювання беззбиткових обсягів виробництва. / Вісник ЖДТУ. – 4(34). – 2005. – с.319-328
2. *Щехорський А.Й.* Моделювання беззбиткових обсягів виробництва. / Вісник ЖДТУ. – 1(35). – 2006. – с.195-203.
3. *Щехорський А.Й.* Моделі беззбиткових обсягів виробництва. / Вісник ЖДТУ. – 2(36). – 2006. – с.280-286.